Ergänzung zur Methode in
der Prädikatenlogik

19.05.16

Es stellt sich die Frage, welcher Gedanke hinter der Interpretation prädikatenlogischer Aussagen steckt. Dies ist die Mengentheorie, die oftmals als grundlegende Theorie für unser mathematisches Verständnis gilt.

Unter einer Menge versteht man eine Anzahl von unterschiedenen Elementen, die ein Ganzes bilden. Ein Ganzes zeichnet sich dadurch aus, dass es Eigenschaften aufweist, die auch allen seinen Teilen (Elementen) zukommt. Das Ganze oder vielmehr die Definition des Ganzen gibt somit an, welche Elemente zu ihm gehören. Elemente können in zweifacher Weise vorliegen. Entweder man weiß ganz genau, was ein Element ist (Konstante) und dass es zu dem Definitionsbereich gehört. Oder man weiß nicht wie andere Elemente beschaffen sind (Variablen), außer dass sie zum Ganzen gehören. Sie weisen also die Eigenschaft auf, die durch den Definitionsbereich bestimmt sind.

In der Prädikatenlogik werden über Prädikate und Quantoren bestimmte Bereiche im Ganzen erfasst und unterschieden.

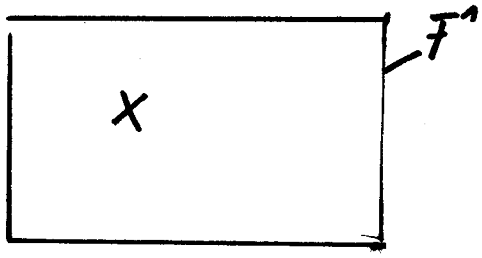
Die folgenden Modelle sollen das Gesagte veranschaulichen:

Mengendiagramme / Darstellung der prädikatenlogischen Verhältnisse

Legende: D – ist der Definitionsbereich; dargestellt durch ein Rechteck

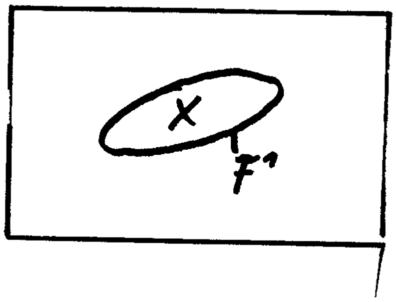
Ellipse – gibt den Bereich der Dinge an, die durch ein Prädikat erfasst sind; dazu zählen Variablen und Konstanten

(1)



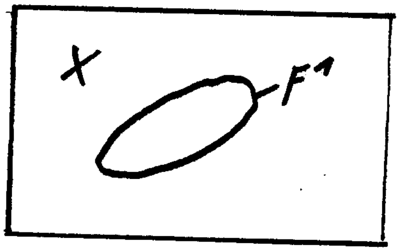
Dieses Modell veranschaulicht die Aussage $\forall x\, F^1 x$. Alle Elemente, die x sind, haben das Prädikat F^1. In diesem Fall entsprechen die Elemente vollständig dem Definitionsbereich.

(2)



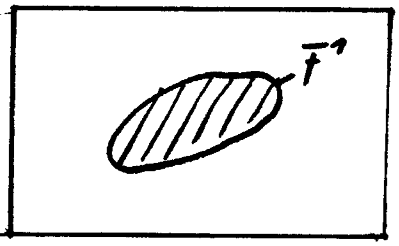
Hier wird die Aussage $\exists x\, F^1(x)$ veranschaulicht. D.h. dass es im Definitionsbereich eine Teilmenge gibt, der noch weitere Eigenschaften zukommen, als sie diese durch den Definitionsbereich bereits hat. Welche anderen Elemente sonst vorhanden sind, ist daraus nicht ersichtlich; nur dass sie sich von der Teilmenge unterscheiden werden.

(3)



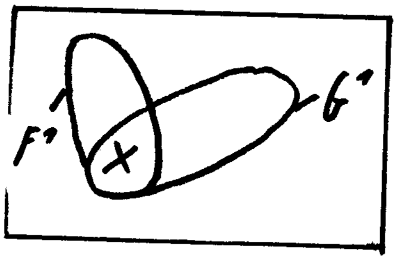
Die Aussage $\neg\forall x\, F^1(x)$ sagt aus, dass für nicht alle Elemente gilt, dass sie durch ein Prädikat erfasst sind. Dementsprechend wird etwas über die Elemente x ausgesagt, denen ein Prädikat nicht zukommt, die sich aber im Definitionsbereich befinden.

(4)

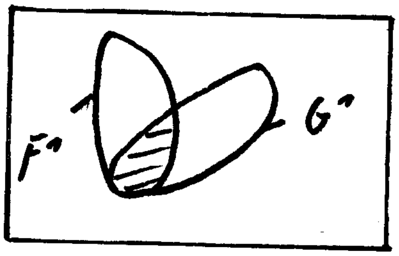


Dies entspricht der Aussage $\neg\exists x F^1 x$. Damit wird ausgesagt, dass es kein Element im Definitionsbereich gibt, dass das Prädikat F^1 aufweist. Damit wird etwas über eine leere Menge ausgesagt.

Wenn wir nun prädikatenlogische Aussagen bilden, so stellen diese Schnittmengen dar, die innerhalb des Definitionsbereichs angetroffen werden können. So z.B.



Dies entspricht der Aussage $\exists x(F^1 x \wedge G^1 x)$. Es wird etwas über die Schnittmenge zweier Teilmengen ausgesagt, die jeweils durch das Prädikat F^1 und G^1 erfasst sind und innerhalb des Definitionsbereichs liegen. Nicht ist damit ausgesagt, dass im Definitionsbereich nicht noch andere Teilmengen sein können.



In diesem Fall wird ausgesagt, dass kein Element gegeben ist, das der Schnittmenge der Teilmengen entspricht, die durch F^1 und G^1 erfasst sind. D.h. $\neg\exists(F^1 x \wedge G^1 x)$.

Bezüglich prädikatenlogischer Aussagen liefert die Interpretation die Wahrheitsbedingungen, indem der Definitionsbereich feststeht. Einige Aussagen weisen jedoch bereits intern bestimmte Strukturen auf, aus denen ersichtlich ist, dass es keine Interpretation geben kann, in der eine prädikatenlogische Aussage wahr ist, weil sie selbst widersprüchlich ist.

Um dies zu überprüfen bedient man sich eines indirekten Beweises der Wahrheit einer Aussage. Dies geschieht dadurch, dass man zeigt, dass die Negation der ursprünglichen Aussage widersprüchlich ist, woraus folgt, dass die ursprüngliche Aussage wahr sein muss, hinsichtlich einer bestimmten Interpretation. Mit der indirekten Methode ist jedoch nicht bekannt, welche Interpretation dies ist. Man stellt nur fest, dass es sie geben muss.

Um diesen indirekten Beweis zu erbringen, nutzen Logiker die Wahrheitsbaummethode. Durch sie ist man in der Lage, dass man die einzelnen Bestandteile der Aussage so in Beziehung setzt, dass ersichtlich ist, ob sie notwendigerweise zu einem Widerspruch führt oder nicht.

Damit man die Methode anwenden kann, müssen folgende Regeln zur Auflösung bekannt sein:

Regeln zur Auflösung der Bestandteile einer Aussage nach der Wahrheitsbaummethode

(1) Doppelte Negation:

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ A \end{array}$$

Aus einer doppelten Negation ergibt sich immer ein positiver Ausdruck. Sie kann daher weggelassen werden. Man schreibt den Ausdruck einfach ohne Negation unter den Ausdruck mit doppelter Negation

(2) Konjunktion:

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ A \\ B \end{array}$$

Eine Konjunktion ist immer wahr, wenn beide Teile der Konjunktion wahr sind. Die Bestandteile die für die Wahrheit der Aussage nötig sind, werden untereinander geschrieben

(3) Disjunktion:

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

Für die Disjunktion ist ausreichend, dass einer der Teile wahr ist. An dieser Stelle verzweigt sich der Wahrheitsbaum, weil man entweder davon ausgeht, dass der eine Teil wahr ist oder der andere.

(4) Subjunktion:

$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

Eine Subjunktion ist nur dann falsch, wenn das Vorderglied wahr und das Hinterglied falsch ist. Daher muss sie wahr sein, wenn das Vorderglied falsch oder das Hinterglied wahr ist. Wieder zwei Alternativen, d.h. es ergibt sich eine Verzweigung.

(5) Bisubjunktion : $A \leftrightarrow B$

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ B & & \neg B \end{array}$$

Eine Bisubjunktion ist entweder wahr, wenn beide Teile wahr sind, oder wenn beide Teile falsch sind. Daher ergibt sich eine Verzweigung.

(6) negierte Konjunktion : $\neg(A \wedge B)$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

Die negierte Konjunktion ist immer dann wahr, wenn eines ihrer Teile falsch ist. Die Teile müssen also jeweils einen umgekehrten Wahrheitswert aufweisen. Insofern spaltet sich der Ast auf.

(7) negierte Disjunktion : $\neg(A \vee B)$

$$\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ \neg A \\ \neg B \end{array}$$

Die negierte Disjunktion ist allein dann wahr, wenn beide Teile falsch sind. Deswegen werden sie untereinander geschrieben.

(8) negierte Subjunktion $\neg(A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ A \\ \neg B \end{array}$$

Da sich der Wahrheitswert durch die Negation umkehrt, ist nur eine Möglichkeit gegeben, bei der die negierte Subjunktion wahr ist, nämlich wenn das Vorderglied wahr und das Hinterglied falsch ist.

(9) negierte Bisubjunktion $\neg(A \leftrightarrow B)$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ / & & \backslash \\ A & & \neg A \\ \neg B & & B \end{array}$$

Es eröffnen sich nur zwei Äste für die Wahrheit der negierten Bisubjunktion. Das ist stets dann der Fall, wenn die Wahrheitswerte der Teile nicht übereinstimmen.

(10) negierte Universalität $\neg\forall\alpha A$ / $\exists\alpha\neg A$ — Damit ist ausgesagt, wenn nicht für alle Elemente etwas gilt, dass es somit Elemente gibt für die ein Prädikat nicht gilt bzw. sie durch dieses nicht erfasst sind.

(11) negierte Existenzbehauptung $\neg\exists\alpha A$ / $\forall\alpha\neg A$ — Wenn es kein Element gibt, dass durch ein Prädikat erfasst wird, so ist dies gleichbedeutend mit der Aussage, dass für alle Elemente gilt, dass sie nicht durch ein Prädikat erfasst sind.

Einsetzungsregeln

$\forall\alpha A\alpha$ — sofern $\forall\alpha A\alpha$ steht, darf α für jede Individuenkonstante ersetzt werden, die durch A erfasst wird.

$\exists\alpha A\alpha$ — sofern $\exists\alpha A\alpha$ steht, darf α für jede Individuen-Konstante ersetzt werden, ist dann jedoch feststehend.