

Die letzten Wochen haben wir uns erfolgreich mit der Syllogistik und Aussagenlogik beschäftigt. Wir sind daher in der Lage Syllogismen zu bilden und Aussagen gemäß ihren Wahrheitswerten zu untersuchen. Des Weiteren können wir mit der Hilfe der Aussagenlogik bestimmen, ob ein Schluss gültig oder schlingig ist. Was die Analyse von Aussagen angeht, scheint die Aussagenlogik ein sehr mächtiges Werkzeug zu sein, um das Logische von Unlogischen zu scheiden.

Doch erschöpft sich die Macht unseres Werkzeuges, wenn wir nicht die Wahrheitswerte zum Gegenstand unserer Untersuchung machen wollen, sondern in die Aussagen hineinschauen möchten; wenn wir also die Begriffe in den Aussagen genauer verstehen und analysieren wollen. Denn die Begriffe in den Aussagen können ebenfalls bestimmte Relationen zueinander aufweisen, die für uns erkennen lassen, ob die Aussage als Ganzes logisch sinnvoll oder selbsterleuchtend ist. Bedenken wir z. B. die Aussage:

„Alle runden Quadrate sind inexistent.“

Mit unserem Hausverstand könnten wir sagen, dass diese Aussage wahr ist. Denn, runde Quadrate gibt es nicht. Es wird also etwas Wahres ausgesagt. Schauen wir uns aber die verwendeten Begriffe an; nämlich rund, Quadrat und inexistent, können wir aus logischer Sicht Bemerkungen machen. Das Prädikat „rund“ ergänzt das Subjekt Quadrat um eine Eigenschaft. „inexistent“ ist hingegen ein Prädikat, das von der Einheit von „rund“ und „Quadrat“ ausgesagt wird. Damit etwas über diese Einheit ausgesagt werden kann, muss die Einheit unseren logischen Prinzipien genügen.

Das runde Quadrat muss also in Einklang mit dem principium identitatis und principium contradictionis sein. Denn allein dann wird durch die Einheit Identität ausgesagt, die sinnvoll ist und somit verstanden werden kann.

Leicht können wir sehen, dass durch den Begriff eines runden Quadrats nichts ausgesagt wird, das unseren Principien entgegensteht. Denn ein Quadrat kann die Eigenschaft der Rundheit nicht aufweisen. Der Begriff des runden Quadrats ist somit in sich selbst widersprüchlich.

Können wir nun daraus aber nicht folgern, dass runde Quadrate nicht existieren? Ist unsere Aussage dann nicht doch wahr?

In logischer Hinsicht ist dies ein Irrtum. Ein Begriff, der in sich selbst widersprüchlich ist, ist streng genommen nämlich kein Begriff. Ein Begriff ist nämlich ein mentaler Sinnträger. Ihm kommt stets ein Sinn, also eine Bedeutung zu. Widerspricht sich jedoch etwas, so können wir es nicht verstehen; für uns ist es bedeutungslos oder; wenn es im logischen Fachterminus zu sagen, es ist Unsinns. Unsinns kommt nun die Eigenschaft zu, dass dieser nicht einmal falsch sein kann. Denn für die Wahrheit und Falschheit wäre voraussetzen, dass der Begriff auf etwas in der Welt angewandt werden könnte. Da es das nicht kann, ist er weder wahr noch falsch; d. h. ihm kann kein Wahrheitswert zukommen.

Wird ein solcher Begriff in einer Aussage verwendet, so bleibt auch diese letztlich unverständlich. Denn nicht kann verstanden werden, was durch sie ausgesagt werden soll. Schließlich können wir nicht alle Bestandteile der Aussage verstehen, was jedoch Voraussetzung dafür ist, dass wir die Aussage im Ganzen begreifen können.

Das Verhältnis der Begriffe zueinander ist bei solchen einfachen Aussagen recht schnell zu überblicken. Das sollte aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass es Umfänge annehmen kann, die schier unüberschaubar sind. Solche Umfänge finden wir ganz besonders in Theorien. Denn in Theorien stehen die einzelnen Begriffe oftmals über verschiedene Ebenen miteinander in Beziehung, sodass der interne Widerspruch oftmals verborgen bleibt oder erst nach einer intensiven Beschäftigung mit der Theorie auffällt. Was uns dabei genau auffällt, wird durch eine andere Art von Logik beschrieben, die es uns ermöglicht in die logischen Strukturen der Aussagen hineinzusehen. Diese Logik nennt man Prädikatenlogik.

Bevor wir uns jedoch dieser zuwenden, müssen wir uns klarer über den Gegenstand der Prädikatenlogik werden. Wie der Name schon sagt, ist sie die Logik der Prädikate bzw. der Prädikation. Prädikate sind, wie wir schon aus der Aussagenlogik wissen, Begriffe. Wenn wir nun wissen wollen, welche logischen Beziehungen Begriffe aufweisen bzw. wie man mit der Prädikatenlogik Widersprüche entdecken kann, müssen wir erst genauer untersuchen, was ein Begriff ist bzw. welche Arten an Begriffen wir in Aussagen unterscheiden können.

Wie vorhin bereits gesagt, lässt sich ein Begriff als mentaler Sinnträger verstehen. Als solcher steht er für eine bestimmte Art von Erkenntnis über etwas. Einer der ersten, die sich darüber Gedanken gemacht haben, wie diese Erkenntnis beschaffen ist und somit auch, was für Begriffe wir verwenden, war der französische Philosoph René Descartes.

Descartes war der Meinung, dass eine Erkenntnis von einem Ding nur dann besteht, wenn sie klar und deutlich ist.¹ Denn nur dann lässt sich an der Erkenntnis, also an ihrer Bestimmtheit, nicht zweifeln. Worauf sich nicht zweifeln lässt, dass ist einem gewiss. Gewissheit besteht dann darin, dass man genau angeben kann, was die Bedeutung eines Begriffes ist, der für eine Erkenntnis steht.

Am deutlichsten hat Descartes dies am Beispiel des eigenen Seins dargestellt. Was jedem klar und deutlich vor Augen steht, ist die Erkenntnis, dass man ein denkendes Wesen ist.

¶ *San certus ~~non~~ me esse rem cogitantem, numquid ergo etiam scio, quid requiratur, ut de aliqua re sim certus? nempe in hac prima cognitione nihil aliud est quam clara quaedam et distincta perceptio eius quod affirmo.*²

Dies ist genau dann der Fall, wenn man denkt, da dann das Denken das Sein ausmacht. Ohne das man ist, könnte man schließlich nicht denken bzw. selbstiges handeln. Das Problem bei einem solchen klaren und deutlichen Begriff ist jedoch, dass er individual ist. Wer für uns waren, was die Erkenntnis beinhaltet, dass wir wir sind, doch dann dies nicht mitgeteilt werden. Damit jemand versteht, was der Begriff von uns ausmacht, müsste er oder sie wir sein. Denn nur durch unsere Erfahrung ist die Erkenntnis klar und deutlich möglich.

Dieser klare und deutliche Begriff ist von großem Interesse. Worauf Descartes nämlich verweist, ist, dass man die vollständige Erkenntnis von etwas, nur zu haben scheint, wenn sein Bestehen davon abhängig ist, dass man es denkt bzw. dann gedacht wird.

¹ Descartes, *Principiorum Philosophiae*, I § 45

² Descartes, *Meditationes de prima philosophia*, Med III, § 2

So gibt es nach Descartes einige Begriffe, die wir klar und deutlich bestimmen können und die für jeden unmittelbar einsehbar sind. Dies sind vor allem die Gegenstände der Mathematik. Da diese nicht in der Welt sind, sondern stets gedacht werden müssen, können sie nicht anders sein, als wir sie denken. Weil wir nun Widerspruchsfrei denken können, müssen die Begriffe klar und deutlich sein, d.h. sie sind von sich aus sinnvoll.

Was von unserem Denken jedoch nicht abhängig ist, wie es die Gegenstände der Welt sind, ist weniger klar und deutlich zu erkennen. Denn die Dinge werden in ihrer Erscheinung modifiziert und unser Wahrnehmungsorgan ist oftmals auch nicht von Einflüssen frei, sodass wir die Dinge nicht ganz so erkennen wie sie sind. Ein beliebtes Beispiel dafür ist, dass man in der Ferne einen Turm sieht, der rund erscheint. Näher man sich dem Turm, so stellt sich jedoch heraus, dass er vierseitig ist. Die Erkenntnis, die man zuerst von dem Turm hatte, erfasst ihn nicht klar und deutlich, da der Begriff, den man gebildet hatte, auf der Grundlage bestimmter Bedingungen entstanden ist. Einige Eigenschaften, die durch den Begriff des Turms ausgedrückt werden, mögen ihm zwar zukommen, doch passen eben nicht alle, weshalb er an Klarheit und Deutlichkeit im Vergleich zum Begriff von uns selbst abnimmt. Descartes hat daher gefolgert, dass wir auch Begriffe verwenden, die einem Dingen unterliegen und daher nicht unmittelbar einsehbar sind.¹

¹ Descartes, Meditationes, Med III
§ 3, § 4

diese unheimlich anfälligen Begriffe sind es, die eine Aussage als falsch kennzeichnen können, da durch sie etwas ausgesagt wird, das nicht der Fall ist. Mit Descartes ließe sich aus diesem Erkenntnis heraus für die Wahrheit einer Aussage bezüglich der Begriffe die Regel aufstellen, dass eine Aussage wahr sein muss, wenn wir alle ihre Bestandteile klar und deutlich einsehen und dadurch erkennen, dass ausgesagt ist, dass der Fall ist, was der Fall ist oder das nicht der Fall ist, was nicht, der Fall ist

Mit dem großen Descartes scheint also das Rätsel gelöst, was für Arten von Begriffen wir in Aussagen verwenden. Wie so oft ist der Rätsels Lösung jedoch nicht das rechte, da nicht verteilbar ist, was denn überhaupt geantwortet worden ist. Die Gelehrten nach Descartes, aber auch schon zu seinen Lebzeiten, sahen dies ähnlich, da man fragte, was ein klar und deutlicher Begriff überhaupt sei. Wie der Cartesianer mit einem Beispiel zu erklären, das mag zwar anschaulich sein, doch bleibt ein Beispiel immer nur ein Beispiel für dasjenige, was erklärt werden soll. Ohne eine genaue Definition dessen zu haben, was durch ein Beispiel veranschaulicht wird, bleibt unbekannt, wofür das Beispiel ein Beispiel ist.

Lange hat es gedauert, bis auch für die Gelehrten klar und deutlich war, was es heißt, dass eine Erkenntnis und somit ein Begriff klar und deutlich ist. Denn erst 34 Jahre nach Descartes' Tod vermochte ein kleiner Leipziger Junge, woran alle großen Geister vor ihm scheiterten.

¹ Descartes, Meditationes, Med. III.
§ 2

Dieser kleine Jurist, der dem großen Descartes die Fackel der Erleuchtung in die Hand gegeben hätte, war jedoch nicht nur Jurist, denn seine Interessen, die er hauptsächlich in seiner Freizeit verfolgte, brachten ihm unter anderem den Ruf eines Philosophen, Mathematiker, Historiker, Logikers, Erfinders, Linguisten, Biologen und vieler mehr ein, was man früher einen Universalgelehrten nannte. Dieser kleine Jurist war der im Vergleich zum großen Descartes titanische Gottfried Wilhelm Leibniz.

In seiner Schrift „Meditationes de cognitione, veritate et ideis“ legt Leibniz dar, dass es im Grunde zwei Arten von Begriffen gibt. Diese sind zum einen die dunklen und zum anderen die klaren Begriffe. Die klaren Begriffe lassen sich in verworrene und deutliche einteilen, wobei die deutlichen entweder inadäquat oder adäquat sind.¹ Nun stellt sich jedoch die Frage, was ein dunkler Begriff ist. Wir wissen bereits, dass ein Begriff ein mentales Sinnsträger ist. Auf Grund dieser Eigenschaft sind wir in der Lage uns etwas vorzustellen oder aber ein Ding in der Welt als Ding einer bestimmten Art zu erkennen. Denn durch den Begriff wissen wir, welche Eigenschaften etwas aufweisen muss, um z.B. ein Stuhl, Jurist oder Ähnliches zu sein. Nun gibt es aber auch solche Begriffe, die man vor allem in Prüfungssituationen bemerken kann. Es sind die Begriffe, von denen man schon einmal gehört hat, von denen man weiß, dass es sie gibt, aber irgendwie vergessen hat, was die Bedeutung des Begriffs ist.

¹ Leibniz, Meditationes de cognitione, veritate et ideis, 32, in: Kleine Schriften zur Metaphysik

Wollte man in Prüfungssituationen einen solchen Begriff erklären, so tappt man buchstäblich im Dunkeln. Der Begriff reicht nicht aus, dass man fragen könnte, welcher Sache er zukommt bzw. was durch ihn angedeutet wird.

Ein dunkler Begriff ist somit ein solcher dessen Definition unbekannt ist. Folgt im Leibniz, so ist auf der Grundlage eines solchen Begriffs keine Vorstellung von etwas möglich. Wir wissen zwar, dass dem Begriff ein bestimmter Sinn zukommt, doch welcher, bleibt verborgen. Kommen insofern dunkle Begriffe in Aussagen vor, so müssen auch die Aussagen dunkel sein. Schließlich verstehen wir den Sinn, also die Bedeutung der Aussage, nicht, obwohl wir uns sicher sind, dass die Aussage eine Bedeutung hat.

Ist der Begriff klar, so sind uns die Prädikate, die in seiner Definition vorkommen, bekannt. Wir können uns aufgrund des Begriffs also etwas vorstellen und wissen auch, welche Eigenschaften etwas haben muss, um ein Ding einer bestimmten Art zu sein.

Man kann jedoch der Fall eintreten, dass meine Definition eines klaren Begriffs nur sehr beschränkt ist, d. h. dass sie nur wenige Prädikate enthält. In solchen Fällen können wir zwei Dinge einer Art nicht genau unterscheiden bzw. könnten wir nicht fragen worin sich die Vorstellung von etwas von einer Vorstellung, die auf demselben Begriff fußt, unterscheidet. Solche Begriffe sind verworren, da sie uns zwar Vorstellungen ermöglichen, aber nicht solche, die eindeutige Aussagen ermöglichen. Hierfür gibt es verschiedene Beispiele, die sich vor allem auf Begriffe beziehen, die wir unserer Erfahrung zu verdanken haben.

zu solchen Begriffen gehören z.B. Farb- oder Geschmacks-
begriffe. Sie könnten bei zwei salzigen Speisen zwar sagen,
dass die eine aus diesen und jenen Zutaten besteht und die andere
aus anderen, doch worin sich der salzige Geschmack der einen
von dem der anderen unterscheidet, bleibt hinter unseren Möglichkeiten.
So ist die eine Speise salzig und die andere auch, woraus man
logisch folgern müsste, dass der Begriff beider Speisen dasselbe
Prädikat enthält; sie somit zum Teil identisch sind. Das ist
aber nicht der Fall; schließlich sind die Speisen vollkommen
voneinander verschieden. Das ist wiederum verwirrend, da aufgrund
des Begriffs von „salzig“ keine klare Unterscheidung zwischen zwei
Begriffen getroffen werden könnte.

Oder um ein moderneres Beispiel zu nehmen; wir können uns
in der Parfümabteilung eines jeden Kaufhauses einen Begriff von
den unterschiedlichsten Düften machen. Bei einigen der Düfte
lässt sich aber nicht sagen, worin sich diese unterscheiden mögen,
da sie gleich riechen. Wir könnten die Düfte zwar nach den einzelnen
Markennamen unterscheiden, doch letztlich scheinen sie identisch,
obwohl vermutlich schon allein rechtlich anzuschließen ist, dass
es sich um dieselben Düfte handelt.

Durch einen verworrenen Begriff ist insoweit also keine genaue
Unterscheidung von Vorstellungen oder Dingen möglich, auch
wenn er ausreicht zu erkennen, was etwas ist bzw. wie es
beschaffen ist. Kommen solche Begriffe in Aussagen vor, so ist
nicht anzuschließen, dass die Aussage missverstanden wird,
weil die Bedeutung der Begriffe auf vieler zugleich und nicht nur
auf etwas einzelnes anwendbar ist.

Letztlich verwenden wir aber auch solche Begriffe, die deutlich sind. Aus ihnen ist immer ersichtlich, inwiefern sich ein Ding oder eine Vorstellung von anderen Dingen oder Vorstellungen unterscheidet. Leibniz selbst gibt für einen solchen Begriff den des Goldes, welchen die Münzprüfer seinen Zeit haben. Was Gold ist, d. h. wie es aussieht, welches Gewicht es hat, wie es sich von allen anderen Metallen unterscheidet, beinhaltet der Begriff des Goldes der Münzprüfer. Durch ihn können sie genau sagen, wie sich Gold von allen anderen Dingen unterscheidet.

Nun gehört zu diesem Begriff aber anscheinend auch ein Prädikat, das wir nun durch Erfahrung erlangen. Wie ich nämlich gerade meinte, gehört zum Begriff des Goldes der Münzprüfer auch der Begriff der Farbe des Goldes. Somit müsste aber in der Definition des Goldbegriffs ein Begriff enthalten sein, der selbst verworren ist. Der Farbe nach kann Gold von anderem Gold schließlich nicht unterschieden werden. Derwegen folgert Leibniz auch, dass auch wenn ein solcher Begriff deutlich ist, weil durch ihn ein Ding oder eine Vorstellung von anderen ganz genau differenziert werden kann, sie doch inadäquat ist. Damit ist angedeutet, dass ein klarer aber inadäquater Begriff zwar zur Unterscheidung von etwas ausreichend ist, doch die Bedeutung des Begriffs nicht ausreicht, um ganz genau sagen zu können, was ~~er~~ ~~etwas~~ etwas von Dingen wie also ein Ding oder eine Vorstellung von allen anderen Dingen und Vorstellungen unterscheidet, doch nicht, wenn sie derselben Art angehören.

Das Gesagte ist erlutungsbedinglich, da noch nicht einleuchtend ist, warum ein klarer deutlicher doch inadequater Begriff Dinge derselben Art nicht unterscheiden kann.

Um dies zu erlaren müssen wir uns ansehen, wie ein Begriff seine Bedeutung erlangt. In einer der ersten Sitzungen sagten wir, dass ein Name durch Begriffe definiert wird.

Grundsatlich besteht also ein jeder Name aus Begriffen und ist somit nicht mehr als selbst ein Begriff. Weiterhin hatten wir Namen und Begriff nach ihrer Funktion unterschieden. Der Name ist das Subjekt und die Begriffe sind die Prädikate.

Wenn wir angeben wollen, was ein Subjekt bedeutet, so führen wir eine Liste von Prädikaten an, die ihm durch eine Kogula zukommen. Diese Liste von Prädikaten ist keine Definition. Da es sich um die Definition eines Namens für etwas handelt, sagt man auch Nominaldefinition dazu.

Schlieelt man eine Nominaldefinition eines Subjekts auf, so können darin Begriffe enthalten sein, deren Bedeutung nicht ganz klar ist, sondern verworren oder vielleicht sogar dunkel.

Das liegt schließlich daran, dass Nominaldefinitionen auf Begriffe zurückgreifen, die selbst wieder aus einer Liste von Prädikaten zusammengesetzt sind. Solche Begriffe sind somit sehr komplex und werden immer komplexer je mehr sie zur Definition anderer Begriffe herangezogen werden.

Nehmen wir z.B. die Nominaldefinition eines Quadrats.

Quadrat lässt sich definieren als: ist vierseitig, gleichseitig und gleichwinklig.

Grundsätzlich reicht diese Definition aus, um ein Quadrat von anderen Dingen und Vorstellung zu unterscheiden. Wenn wir jedoch nicht wissen, was es genau heißt, dass etwas vierseitig ist, obwohl uns klar ist, was gleichseitig und gleichwinklig ausmacht, so hat unsere Definition entweder ein Element, das für uns einen dunklen Begriff darstellt oder wir können nicht sagen, was die Vierseitigkeit in Vergleich zu anderen Figuren so unterscheiden macht, dass sie nicht auch einer anderen Figur zukommen könnte. \square Gehen wir davon aus, dass die Vierseitigkeit kein dunkler, sondern für uns verworrenen Begriff ist, müssten wir nach der Definition für die Vierseitigkeit fragen. Dazu müsste klar sein, was eine Seite ist und was vier ist. Somit benötigen wir wieder die Definition einer Seite und der vier.

Bei der Definition der Seite würden dann aber wieder Begriffe, wie z.B. Gerade auftauchen, die zur Definition der Linie letztlich, ganz am Ende, in der Definition des Punktes mündet.

Sind uns nicht alle diese Definitionen geläufig, so bleibt uns ein Teil der Bedeutung des Begriffs des Quadrats verworren, da wir nicht genau sagen können, wie sich das Quadrat aufgrund seiner Vierseitigkeit von anderen Figuren unterscheidet.

Inadaquat ist der Begriff jedoch selbst dann, wenn wir ihn soweit
aufgeschlüsselt haben; denn wir sind außer Stande bei einer solchen
Nominaldefinition ein gezeichnetes Quadrat von einem anderen zu
unterscheiden. Um auch diese Unterscheidung treffen zu können,
müssten wir unsere Definition mit immer mehr Prädikaten anreichern,
bis wir genau das Quadrat erfassen, wofür der Begriff gebildet wird.
Damit die Bedeutung der Begriffe ein Ding genau erfassen kann,
bedarf es aber der Auflistung aller Eigenschaften, die es haben
kann. Zudem müssten uns auch die Definitionen dieser Eigenschaften
vollends klar sein, was für den beschränkten Verstand des
Menschen aber unmöglich scheint. Wie Leibniz nämlich versucht
hat, ist die Hervorbringung eines klaren deutlichen und
adaequaten Begriffs zwar ~~unmöglich~~ logisch möglich, aber
aufgrund der Komplexität der Dinge nicht umsetzbar. Daher
ist das höchste der Gefühle für uns ein Begriff, der klar
deutlich aber stets inadaquat ist. Das gilt zumindest, wenn die
Begriffe etwas erfassen sollen, das außerhalb des Verstandes ist.
Denn; das galt auch für Leibniz, die Gegenstände der Mathematik
können vollständig zerlegt werden, sodass auch adaequate Begriffe
in der Mathematik möglich; wenn nicht sogar wirklich gegeben sind.

Für Leibniz und seine Nachwelt hatte diese Aufschlüsselung der von uns verwendeten Begriffe großen Einfluss auf das wissenschaftliche Arbeiten. Denn es wurde klar, dass man Begriffe, die man nicht vollkommen versteht, da sie verworrene Bestandteile enthalten könnten, anslegen muss. Dabei muss die Auslegung bestmöglich so erfolgen, dass eine Definition geliefert wird, deren Prädikate vollkommen einrichtig sind und nicht in irgendeiner Weise widersprüchlich zueinander. Das gilt auch für die Begriffe, die andere ganz selbstverständlich gebrauchen oder von denen wir meinen, dass deren Bedeutung vollkommen klar sei. Oftmals zeigt sich nämlich in der Auslegung, dass die Bedeutung doch nicht so klar ist oder, im schlimmsten Fall, dass jede Auslegung zu Widersprüchlichkeiten führt.

Leibniz selbst hat dies an einem Begriff versucht zu verdeutlichen, der zu seiner Zeit ganz gebräuchlich war und von dem jeder meinte, dass er wüsste, was er bedeutet. Dieser Begriff ist der der "schnellsten Bewegung" [motus celerissimi]. Selbst wir heute würden wohl meinen, dass der Begriff der schnellsten Bewegung aussetzt, dass etwas eine Geschwindigkeit aufweist, die nicht mehr überboten werden kann. Denn dann bewegt sich etwas so schnell, dass es nicht mehr schneller geht. Das erscheint nun klar und deutlich. Leibniz legt den Begriff jedoch anhand eines Beispiels aus, das zeigt, dass der Begriff in sich widersprüchlich ist, obwohl jeder versteht, was damit gemeint ist.

So sagt Leibniz:

„Ich pflege auch, um dies zu verdeutlichen, das Beispiel von der schnellsten Bewegung, die einen Widerstand enthält, zu gebrauchen; setzen wir nämlich, dass sich ein Rad mit der schnellsten Bewegung dreht - wer nicht dann nicht, dass sich irgendein verlängelter Radius des Rades an seinem äußersten Punkte schneller bewegt als der Nagel auf der Felge des Rades? dessen Bewegung ist also nicht die schnellste, was gegen die Annahme ist, Auf den ersten Blick könnte es indessen so scheinen, als ob wir eine Idee der schnellsten Bewegung hätten; wir verstehen nämlich durchaus, was wir sagen, und dennoch haben wir keinesfalls eine Idee von unmöglichen Gegenständen.“

Leibniz Beispiel zeigt, weshalb jeder Begriff ausgelegt gehört.

Seien wir z.B. die Wörter in Gesetzen, so verstehen wir zwar, was sie ungefähr aussagen, doch was sie genau aussagen und welcher Begriff letztlich dahinter steht, muss erst durch uns festgesetzt werden.

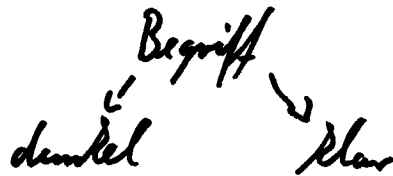
Dann erst ist nämlich logisch nachvollziehbar, was ~~das~~ eine mit einer Aussage oder einem Gesetz gemeint ist und ob das Gemeinte auch widerspruchsfrei ist. Ohne eine solche Auslegung bleiben die Aussagen wie Gesetze schlichtweg zu unbestimmt, als dass durch sie irgend-
etwas erkannt werden könnte bzw. sie wären zu verworren.

Mit Leibniz können wir also letztlich genau bestimmen, was der Gegenstand der Prädikatenlogik ist, wenn diese von den Beziehungen der Begriffe zueinander handelt.

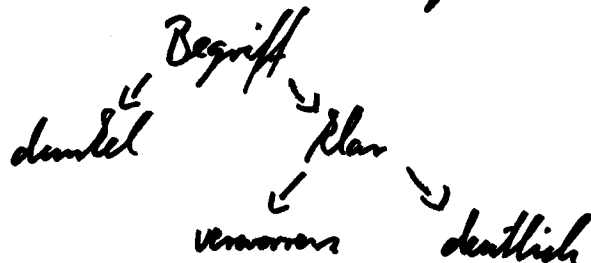
Ist die Definition eines Begriffes für uns unbekannt, so stellt er für uns zwar einen Begriff dar, doch ist uns seine Bedeutung nicht gegenwärtig. Der Begriff als mentaler Sinnträger versagt somit in seiner Funktion; er ist also dunkel.



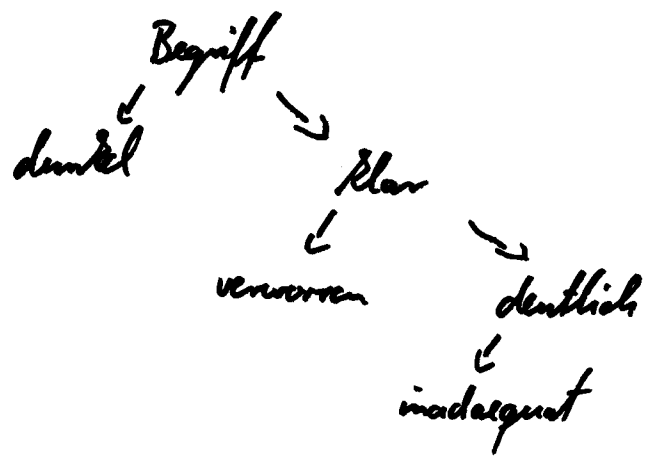
Diesen Begriffen stehen die klaren Begriffe gegenüber. Sie erfüllen ihre Funktion als mentale Sinnträger, weil wir durch ihre Definition erkennen können, was der Begriff bedeutet.



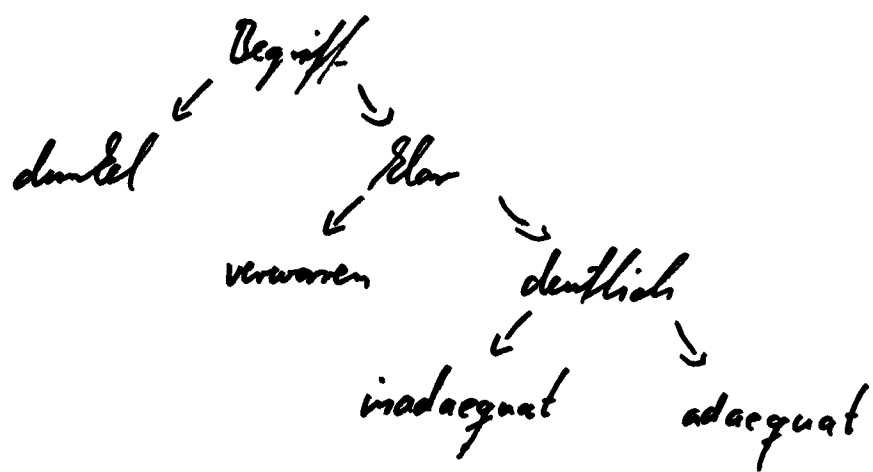
Diese Erkenntnis der Bedeutung ist entweder verworren oder ~~ist~~ deutlich. Verwirren ist sie, wenn aus der Definition nicht alle Prädikate darauf verstanden werden, das wir vollständig sagen können, was ein Begriff bedeutet. Deutlich ist ~~er~~ jedoch, wenn wir alle Prädikate seiner Definition verstehen und aussagen können, was sie bedeuten.



Klare und deutliche Begriffe können in ihrer Definition Prädikate enthalten, die für uns zwar gewöhnlichen, dass wir genau wissen, was der Begriff bedeutet, aber wir durch ihn nicht unterscheiden können, was zwei Dinge denselben Art nach sind. Weil in den Begriffen Prädikate vorkommen, die wir durch unsere Sinne erlangt haben, geben unsere Sinne eine Grenze des Verstehbaren vor. Daher sind die Begriffe hinsichtlich der Dinge, die durch sie bezeichnet werden, stets inadäquat.



Wären die Grenzen wegfallen, so ließe sich jedoch denken, dass wir Kraft des Verstandes auch Begriffe verwenden könnten, die genau auf einzelne Dinge in der Welt anwendbar sind, sodass wir sie nicht nur von ~~anderen~~ anderen Dingen differenzieren könnten, sondern auch unter allen Dingen identifizieren könnten. Solche Begriffe wären dann adäquat.



Da nun ersichtlich ist, was der Gegenstand der Prädikatenlogik ist, können wir näher auf die Verhältnisse von Begriffen in Aussagen eingehen. Dazu müssen wir uns jedoch zuerst ein paar Umstände vergegenwärtigen, die aus einer der ersten Sektionen bereits bekannt sein sollte. Wie wir wissen beziehen sich Begriffe immer auf bestimmte Mengen von Dingen. Deutlich ist dies in Aussagen wie:

„Alle Juristen sind sterblich.“

oder

„Einige Menschen sind Juristen.“

In der alltagspraktischen Sprache, wie wir sie in den Übungen besprochen haben, mag dies nicht so klar erscheinen; was davon liegt, dass unsere Sprache diesen Umstand verdeckt.

Damit wir die Verhältnisse der Begriffe zueinander in den Aussagen verstehen können, muss der Umstand für uns jedoch klar sein. Zu diesem Zweck entwickelte im 19. Jhd. erstmals der Logiker und Mathematiker Friedrich Ludwig Gottlob Frege eine formale Sprache für die Verhältnisse der Begriffe, die diesen Umstand sichtbar macht. Was Frege tat, war nichts weiter als das, was wir bereits aus der Aussagenlogik kennen. Er schrieb für Begriffe bestimmte Symbole und stellte Regeln auf, wie mit diesen in Aussagen umzugehen sei. Dabei orientierte er sich jedoch sehr an der Mathematik, weshalb es im Folgenden an einigen Stellen gesondeter Erläuterungen bedarf.

In der Mathematik wie in der Prädikatenlogik läßt sich von zwei Arten von Mengen reden. Entweder von einer Gesamtmenge oder einer Teilmenge. Reden wir bei Begriffen von einer Gesamtmenge, so sagen wir, dass die Eigenschaft bzw. Bedeutung, die ein Begriff ausweist, für alle Elemente einer Menge gilt. Reden wir daher in einer Aussage von allen Juristen, so bezieht sich das „alle“ auf jedes Individuum, dem die Eigenschaft zukommt, dass er oder sie Jurist ist.

Logiker haben sich nun gedacht, dass sich die einzelnen Elemente als eine Variable darstellen lassen z. B. die Variable „ x “. Variable heißt in diesem Kontext, ein x -beliebiges Element aus einer Menge. Um genau sagen zu können, dass alle Elemente der Menge erfasst sind, setzen wir ein \forall vor die Variable. Damit ist ausgedrückt, dass für alle x gilt. ^{für} ^{gilt.} Man muss jedoch noch klar sein, was x ist. Dazu wird für einen bestimmten Begriff bzw. für ein Prädikat ein Großbuchstabe z. B. ein F gewählt. Diesem Symbol läßt sich der Begriff „Jurist“ zuweisen. Um nun deutlich zu machen, dass mit x immer ein Jurist gemeint ist, wird wiederum der Großbuchstabe vor das x geschrieben. Somit bekommt man die Prädikatenlogische Aussage $\forall x Fx$ „Für alle x gilt, dass x ein Jurist ist.“

Wollen wir uns nun jedoch auf einen Teil und nicht alle Elemente beziehen, so schreibt man statt einem \forall ein \exists . Dieses \exists steht dafür, dass es mindestens ein Element in einer Menge gibt, welches eine bestimmte Eigenschaft aufweist. Dem entsprechend schreibt man die prädikatenlogische Aussage $\exists x Fx$ „Es gibt mindestens ein x für welches gilt, dass x ein Jurist ist.“

oder alternativ lässt sich sagen:

„Für einige x gilt, dass sie Juristen sind.“

Das wirklich Besondere an der Prädikatenlogik ist nun jedoch nicht ausschließlich, dass wir dadurch die Quantitäten von Aussagen einbeziehen können. Denn wie schon gesagt, lässt sich durch die Prädikatenlogik vor allem näher auf die Beziehung der Begriffe eingehen.

So kann in einer Aussage z.B. ein Prädikat vorkommen, das mehrere Relationen aufweist, als es das Prädikat des Jurist-sein aufweist. Das ist z.B. dann der Fall, wenn das Prädikat Verhältnisse aussagt, wie, dass x „größer als“ y ist.

In solchen Fällen muss für uns bei den verwendeten Zeichen klar sein, um was für eine Art von Prädikat es sich handelt. Dazu schreibt man die so genannte Wertigkeit des Prädikats als Exponent an das Zeichen des Prädikats. Im Fall des zweistelligen Prädikats „größer als“ wäre dies F^2 .

Eindeutender Weise muss einem solchen Prädikat aber auch folgen, welche Elemente an welcher Stelle stehen. Dies ist wiederum aus der Reihenfolge der Variablen ersichtlich, die man gebraucht. Sollte x größer als y sein, schreibt man folglich $F^2 xy$; sollte y größer als x sein, so schreibt man $F^2 yx$.

In dieser Weise ist es uns nun möglich auf die Inhalte von Aussagen sehr viel genauer einzugehen. Vorteilhaft ist dabei, dass alle Operatoren und Regeln, die wir aus der Aussagenlogik kennen, beibehalten werden können. Der Unterschied zur Aussagenlogik besteht allein darin, dass wir nicht mehr auf die Zeichen wie p und q zurückgreifen, sondern diese mit der Hilfe der neuen Methode in ihre Bestandteile auflösen.

So können wir die Aussage:

„Wenn alle Juristen Menschen sind,
dann sind sie sterblich.“

$$p \rightarrow q$$

genauer auflösen, indem wir schreiben:

$$(\forall x F^1 x \wedge \forall x G^1 x) \rightarrow \forall x H^1 x$$

$F^1 = \dots$ ist Jurist

$G^1 = \dots$ ist Mensch

$H^1 = \dots$ ist sterblich.

Damit eine solche Auflöserung immer gelingt, müssen uns bestimmte Regeln klar sein, die dafür sorgen, dass unsere Aussagen immer ganz genau bestimmt sind.

Ich sprach vorher von den Variablen, die für die Elemente einer Menge stehen. Damit Variablen dies können, müssen sie immer durch die Zeichen für die Mengen bestimmt werden.

Diese Zeichen, die man Quantoren nennt, legen fest, dass eine Variable auch tatsächlich einer Menge zugeordnet ist.

Steht der Quantor nicht da und ist die Variable durch ihn nicht näher bestimmt, so handelt es sich nicht um eine prädikatenlogische Aussage. Zeichenfolgen wie $G^1x \wedge F^2xy$ sind demnach keine Aussagen.

Neben den Variablen können jedoch auch Konstanten in Aussagen auftreten, die nicht als Element einer bestimmten Menge aufzufassen sind, sondern für sich allein stehen können.

Solche Konstanten sind z. B. Eigennamen, wie z. B. Cäsar oder Sokrates. Für solche Konstanten wählt man für gewöhnlich die Anfangsbuchstaben der Alphabets. Sie müssen in prädikatenlogischen Aussagen nicht durch Quantoren näher bestimmt werden. Es reicht daher, wenn z. B. $G^1a \wedge F^2ab$ steht.

Nun stellt sich jedoch noch eine entscheidende Frage: Wie bestimmt man die Wahrheit oder Falschheit solcher Aussagen heraus? Das ist allein dann möglich, wenn wir irgendwie festgelegt haben, worauf sich die Mengen und somit die Elemente in ihnen beziehen sollen.

Wie in der Mathematik benötigt man für die Lösung daher der Angabe des Gültigkeitsbereichs der Aussage bzw. des Gegenstandsbereichs. Dazu müssen wir zum Beginn immer eine Interpretation der Aussage angeben. Sie legt z.B. fest, dass sich ^{eine} die Aussage $\forall x F^?x$ nicht nur auf Primzahlen bezieht, d.h. dass die Variablen jeweils Elemente sind, die Primzahlen darstellen. Ohne Angabe der Interpretation könnte nicht entschieden werden, welche Elemente durch die jeweiligen Mengen ausgedrückt werden und ob die Prädikate den Elementen in wahrer oder ~~falsch~~ falscher Weise zukommen.

Damit eine prädikatenlogische Aussage verstanden werden kann, muss also eine Interpretation vorhanden sein. Diese bezieht sich auf die Variablen. Zudem müssen die Konstanten benannt sein. Des Weiteren müssen die Prädikate, die den Variablen und/oder Konstanten zukommen sollen bestimmt sein.

Dennach sieht eine verständliche prädikatenlogische Aussage wie folgt aus:

D_1 = die Menge der natürlichen Zahlen

$a = 1$

$b = 2$

$F^?$ = ... ist eine Primzahl

$G^?$ = ... ist durch ... teilbar

$H^?$ = ... ist eine gerade natürliche Zahl

$$\forall x G^?x a \wedge (\exists y H^?y \vee F^?b)$$